Antigravitation?

Wenn ein Gegenstand ohne erkennbare Energiezufuhr eine schiefe Ebene aufwärts rollt, widerspricht dies der intuitiven Erfahrung und in höchstem Masse dem physikalischem Grundwissen. Der aufwärtsrollende Doppelkegel ist ein anschauliches Beispiel dafür, wie ein Experiment, das bei Laien Verblüffung und physikalisch versierten Menschen Entsetzen hervorruft.

A)Beschreibung des Experiments

Schon im 18. Jahrhundert beschreibt Gravesande [1] ein Experiment, bei dem ein Doppelkegel eine schiefe Ebene scheinbar hinaufrollt. Diese Beobachtung steht dann im krassen Gegensatz zur Energieerhaltung, die sich über die Jahre als bewährtes physikalisches Prinzip herausgestellt hat.
Der Doppelkegel kann natürlich nur deshalb hochlaufen, weil sich sein Schwerpunkt beim Abrollen der Kegelflächen auf den Schienen abwärts bewegt, was dann wiederum im Einklang mit dem physikalischen Modell ist. Das wird dadurch ermöglicht, das der Auflagepunkt des Doppelkegels auf den Schienen zu den Kegelspitzen wandert. Ein Blick auf die Frontalansicht enthüllt das Geheimnis dieser optischen Täuschung, denn die beiden Schienen laufen unter einem bestimmten Winkel α zum rechten Bildrand hin zusammen. Zudem lässt sich bei genauer Betrachtung des rollenden Kegels von der Seite den nach unten wandernden Schwerpunkt direkt beobachten (vgl. Experimentaufzeichnung).
Die Bedingung, unter der diese interessante Bewegung stattfinden kann, hängt Öffnungswinkel γ des Kegels, dem Öffnungswinkel α der Schienen und dem Anstiegswinkel β der Schienen ab.

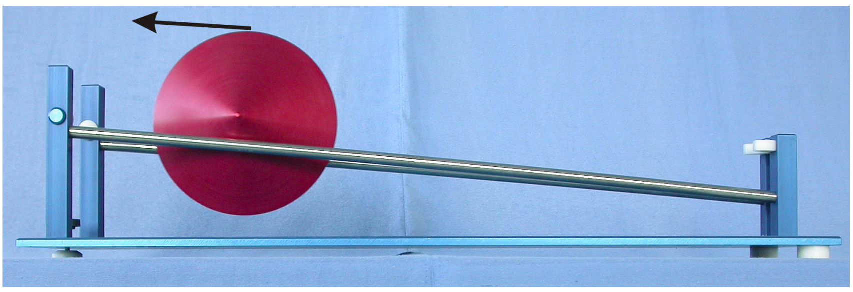

Abbildung 1: beschrieb

B) Physikalische Grundlagen

Im Folgenden gilt es nun zu bestimmen wie die Rollbewegung des Doppelkegels von den drei Winkeln α, β und γ abhängt. Dazu wir der Doppelkegel zuerst in einem geeigneten Koordinatensystem dargestellt (siehe Abb. 2)

[1] s'Gravesande G. J.: Physices Elementa Mathematica Experimentis Confirmata, Leiden, 1748

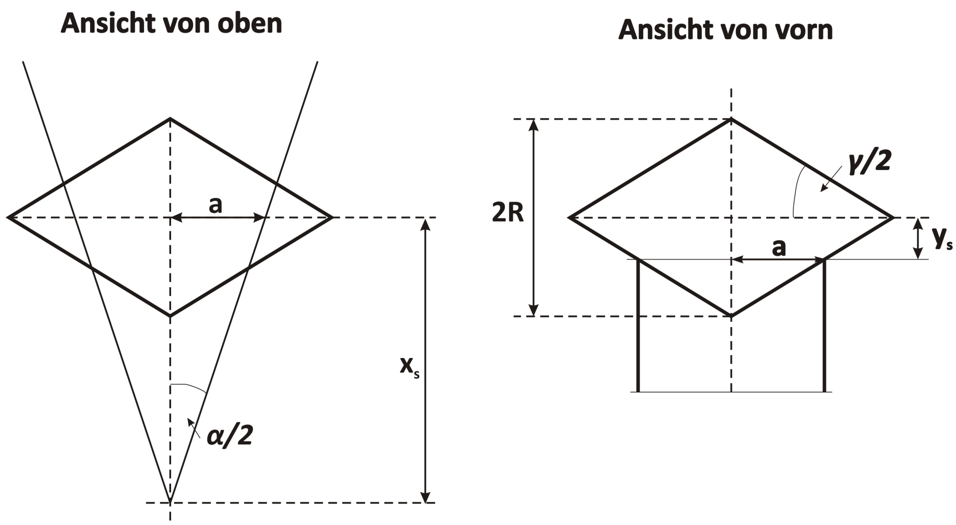

Abbildung 2: Beschrieb

Die Koordinanten des Schwerpunktes sind durch (x_s, y_s) gegeben. Als Vorbereitung werden aus der obigen Figur folgende zwei Gleichungen abgeleitet

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{x_s} \Rightarrow a = x_s \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1}$$

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{R - y_s}{a} \Rightarrow y_s = R - a\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \overset{(1)}{=} R - x_s \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{2}$$

Um zu erkennen, ob sich der Schwerpunkt nach unten bzw. in negativer y-Richtung bewegt, ist es sinnvoll das Koordinatensystem zu wechseln Die ge-

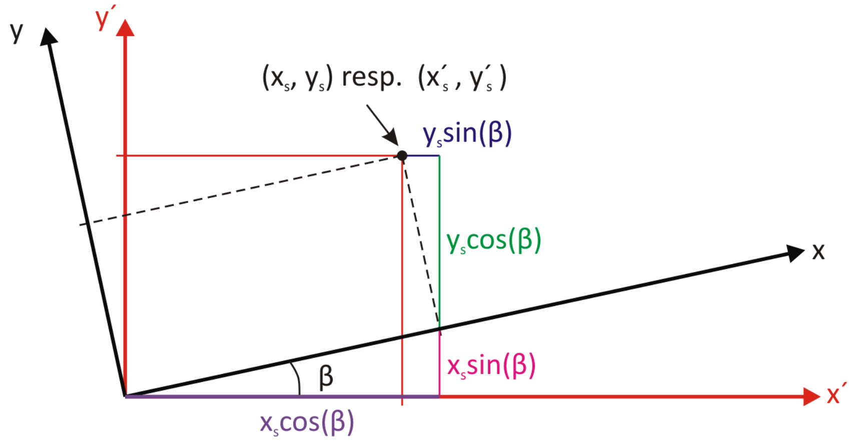

Abbildung 3: beschrieb

strichenen Koordinaten des Schwerpunktes werden in Abhängigkeit der ungestrichenen geschrieben

$$\begin{matrix} x'_s = x_s \cos(\beta) - y_s \sin(\beta) \\ y'_s = x_s \cos(\beta) + y_s \cos(\beta) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_s \\ y'_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\beta) & \cos(\beta) \\ \cos(\beta) & -\sin(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \tag{3}$$

Bei genauerer Betrachtung der Matrix in (3) zeigt sich, dass es hierbei nicht um eine Drehmatrix handelt.
Für das nach unten bewegen des Schwerpunktes genügt es die Koordiante y'_s in Betracht zu ziehen. Dazu wird y'_s als Funktion von x_s geschrieben

$$\begin{aligned} y'_s &= x_s \sin(\beta) + \left[R - x_s \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right] \cdot \cos(\beta) \\ &= x_s \cdot \underbrace{\left[\sin(\beta) - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos(\beta)\right]}_{\overset{!}{<}0} + R\cos(\beta) \end{aligned}$$

Wenn nun der Ausdruck in den Klammern negativ ist, verringert sich der Wert von y'_s für $x > x_s$, was auch für $x' > x'_s$ gültig ist. Für die Bewegung des Schwerpunktes nach unten oder anders gesagt das scheinbare Hinaufrollen des Doppelkegels gilt folgende Bedingung

$$\begin{aligned} \sin(\beta) - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos(\beta) &< 0 \\ \Leftrightarrow \tan(\beta) &< \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

Ist die Bedingung (4) nicht erfüllt, so muss sich der Doppelkegel in negativer x'-Richtung (Energieerhaltung!) bewegen, d.h. von rechts nach links resp. oben nach unten (vgl Abb. 3). In diesem Fall stimmt die Bewegung des Doppelkegels mit der Intuition überein.